Unidad II

Fundamentos de probabilidad

2.1. Conjuntos y técnicas de conteo.

Un conjunto es una coleccion bien definida de objetos a los cuales tambien llamamos los elementos de un conjunto.

A los conjuntos los identificamos con letras mayusculas y a los elementos con letras minusculas, encerrados en {}.

los conjuntos se pueden describir de 2 formas:

1.- metodo de la lista. consiste en enumerar a todos los elementos que pertenecen a dicho conjunto. ejemplo:

A={1,2,3,4,5,6} B={a,e,i,o,u}

2.- metodo de la regla consiste en definir la caracteriztica comun para ser considerado un elemento. ejemplo.

A= x b= {x|x sea una letra vocal

Definición y notación de un conjunto

A los conjuntos se les representa con letras mayúsculas A, B, C, ... y a los elementos de los conjuntos se denotan con letra minúsculas a, b, c, ...En base a la cantidad de elementos que tenga un conjunto, estos se pueden clasificar en conjuntos

Ejemplo : Supongamos que Venezuela es un conjunto, los elemento de ella son todos los estados.

finitos e infinitos.En el caso del ejemplo anterior Venezuela es un conjunto finito ya que se pueden contar sus elementos.

Podemos definir de manera intuitiva a un conjunto, como una colección o listado de objetos con

características bien definidas que lo hace pertenecer a un grupo determinado.

Para que exista un conjunto debe basarse en lo siguiente:

- La colección de elementos debe estar bien definida.
- Ningún elemento del conjunto se debe contar más de una vez, generalmente, estos elementos deben ser diferentes, si uno de ellos se repite se contará sólo una vez.
- El orden en que se enumeran los elementos que carecen de importancia.

2.2. Concepto clásico y como frecuencia relativa.

Una fracción en la que el numerador es igual al número de apariciones del suceso y el denominador es igual al número total de casos en los que es suceso pueda o no pueda ocurrir. Tal fracción expresa la probabilidad de que ocurra el suceso".
El enfoque clásico de la probabilidad está basado en la suposición de que todos los resultados del experimento son igualmente posibles. La probabilidad se calcula de la siguiente manera:

Ejemplo:
El experimento es lanzar un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga un dos hacia arriba?
Las caras el dado están numeradas del 1 al 6, entonces hay una posibilidad de un total de seis de que el número 2 quede hacia arriba:

$$P(\text{cae } 2) = \frac{1}{6} = 0.166$$

La principal dificultad que presenta esta interpretación de la probabilidad es que se basa en sucesos equiprobables, siendo fácil para problemas sencillos, como los de cartas, dados o urnas, es casi imposible para problemas más complejos.

Frecuencia relativa

Es la relación o cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de observaciones.
Es la proporción entre la frecuencia de un intérvalo y el número total de datos.

2.3. Espacio muestral y eventos.

Es un conjunto formado por todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.
A cada elemento del espacio muestral se conoce como punto muestral (elemento o miembro del espacio muestral).

Notación. El espacio muestral de un experimento se denota por medio de la letra S. En algunas referencias se usa la letra griega mayúscula omega, Ω para representar el espacio muestral.

EJEMPLOS DE ESPACIO MUESTRAL

1. Cuando se lanza una moneda puede caer “águila”(*a*) o “sol”(*s*). Así, S = {*a, s*}.

2. Al lanzar un dado, puede caer cualquiera de sus seis caras con 1, 2, 3, 4, 5 o 6 puntos. En este caso, S={1,2,3,4,5,6}.

3. Si se lanzan tres monedas al mismo tiempo puede ocurrir cualquiera de 8 resultados posibles. Así que, S={aaa, sss, ass, ssa, sas, saa, aas, asa}.

4. Al registrarse el sexo de la siguiente persona que nace puede ocurrir hombre (*h*) o mujer (*m*). El espacio muestral es S={h, m}.

5. En el Ejemplo 5 de experimento, si en el primer lanzamiento cae sol, entonces se lanza otra vez la moneda, dando lugar a las siguientes posibilidades, ss, sa; pero si en el primer lanzamiento ocurre águila, se lanza un dado, dando lugar a los puntos muestrales a1, a2, a3, a4, a5, a6. Entonces el espacio muestral es S={ss, sa, a1, a2, a3, a4, a5, a6}

Observe que en este Ejemplo de espacio muestral, cada elemento es un par ordenado; en el Ejemplo 3, una terna ordenada. **En general, un punto muestral puede consistir de un k-tuple ordenado.**

A veces, los espacios muestrales tienen un número grande o infinito de elementos. En este caso es mejor usar una regla o descripción antes que enumerar(*) sus

elementos. Si los resultados posibles de un experimento son el conjunto de individuos en el mundo con más de 1.60 m de estatura que asisten a una universidad, el espacio muestral se escribe así:
S = {x|x es una persona con más de 1.60 m de estatura que asiste a una universidad}

Un evento es un subconjunto del espacio muestral

1. Al lanzar una moneda, vimos que S = {a, s}. Entonces el evento A de que caiga "sol" es el subconjunto A = {s}. Se cumple que A $\subset$ S.
2. Al lanzar un dado, puede definirse el evento B de que ocurra una cara con número par. En este caso, B={2,4,6}. Observemos que B es un subconjunto de S, B $\subset$ S

2.4. Axiomas y teoremas.

Para el cálculo de probabilidades hay que tomar en cuenta los Axiomas y Teoremas que a continuación se enumeran.

1)La probabilidad de que ocurra un evento A cualquiera se encuentra entre cero y uno.

0 £ p(A) ³ 1

2)La probabilidad de que ocurra el espacio muestral d debe de ser 1.

p(d) = 1

3)Si A y B son eventos mutuamente excluyentes, entonces la p(AÈB) = p(A) + p(B)

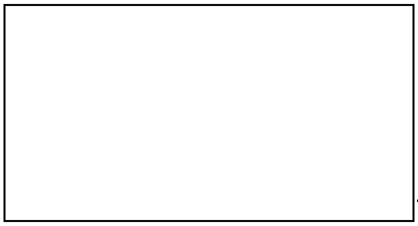
Generalizando:

Si se tienen *n* eventos mutuamente excluyentes o exclusivos A_1, A_2, A_3,.....An, entonces;

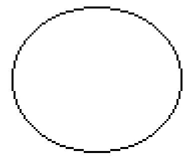
p(A_1ÈA_2È.........ÈA_n) = p(A_1) + p(A_2) + ...+ p(A_n)

TEOREMAS

d



TEOREMA 1. Si f es un evento nulo o vacío, entonces la probabilidad de que ocurra f debe ser cero.



A

p(f)=0

DEMOSTRACIÓN:
Si sumamos a fun evento A cualquiera, como f y A son dos eventos mutuamente excluyentes, entonces p(AfÈ)=p(A) +p(f)=p(A). LQQD

2.5. Probabilidad clásica: Espacio finito equiparable

Sea d un espacio muestral que contiene *n* elementos, $d = \{a_1, a_2, a_3,....,a_n\}$, si a cada uno de los elementos de d le asignamos una probabilidad igual de ocurrencia, $p_i = 1/n$ por tener *n* elementos d, entonces estamos transformando este espacio muestral en un espacio finito equiprobable, el que debe cumplir con las siguientes condiciones:

1. Las probabilidades asociadas a cada uno de los elementos del espacio muestral deben ser mayores o iguales a cero, p_i ³ *0.*

2. La sumatoria de las probabilidades asociadas a cada elemento del espacio muestral debe de ser igual a 1.

$$Sp_i = 1$$

En caso de que no se cumpla con las condiciones anteriores, entonces no se trata de un *espacio finito equiprobable.*
Solo en el caso de espacios finitos equiprobables, si deseamos determinar la probabilidad de que ocurra un evento *A* cualquiera, entonces;

$p(A) = r*1/n = r/n$

p(A) = maneras de ocurrir el evento A/ Número de elementos del espacio muestral

r = maneras de que ocurra el evento A
1/n = probabilidad asociada a cada uno de los elementos del espacio muestral
n = número de elementos del espacio muestral

2.6. Probabilidad condicional e independencia.

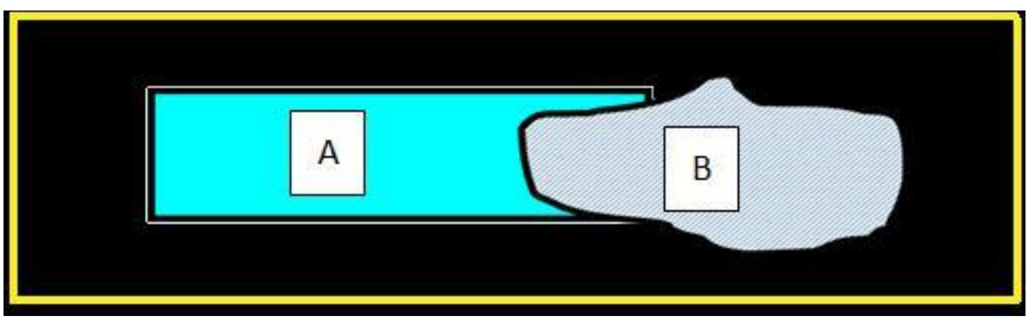
- Sea B un evento arbitrario de un espacio muestral S con P(B)>0. La probabilidad de que un evento A suceda una vez que B haya sucedido, o en otras palabras, ***la probabilidad condicional de A dado B,*** se define como sigue:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- P(A|B) = número de elementos que pertenecen tanto A como a B / número de elementos de B.

Comprendiendo la probabilidad condicional

Como se aprecia en el diagrama de Venn, P(A|B) en cierto sentido mide la probabilidad relativa de A con relación al espacio reducido B.



$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

• Ejemplo de probabilidad condicional

Ejemplo: Suponga que se tira un dado y deseamos que salga el número 6.
Sabemos que P(6)=1/6.
Suponga que no sabemos que número salió, pero nos dicen que fue un número par (evento B). Esta nueva información reduce nuestro espacio muestral y cambia la probabilidad de hallar un 6.

1 2 3 4 5 6

Probabilidad original de que salga 6 = 1/6.
Probabilidad del espacio muestral reducido = 1/3.

$$P(6 \mid PAR) = \frac{P(6 \cap PAR)}{P(PAR)} = \frac{1/6}{1/2} = 1/3$$

Nota: La probabilidad de la intersección de 6 y un par es 1/6 debido a que la intersección de los dos eventos es solamente el evento 6.

• Otras formas útiles de probabilidad condicional
Existen otras dos formas útiles de la definición de probabilidad condicional, que son iguales algebraicamente a la fórmula original.

2.7. Teorema de Bayes

En la teoría de la probabilidad el **teorema de Bayes** es un resultado enunciado por Thomas Bayes en 1763[1] que expresa la probabilidad condicional de un evento aleatorio *A* dado *B* en términos de la distribución de probabilidad condicional del evento *B* dado *A* y la distribución de probabilidad marginal de sólo *A*.

En términos más generales y menos matemáticos, el teorema de Bayes es de enorme relevancia puesto que vincula la probabilidad de A dado B con la probabilidad de B dado A. Es decir que sabiendo la probabilidad de tener un dolor de cabeza dado que se tiene gripe, se podría saber (si se tiene algún dato más), la probabilidad de tener gripe si se tiene un dolor de cabeza, muestra este sencillo ejemplo la alta relevancia del teorema en cuestión para la ciencia en todas sus ramas, puesto que tiene vinculación íntima con la comprensión de la probabilidad de aspectos causales dados los efectos observados.

Sea $\{A_1, A_2, ..., A_i, ..., A_n\}$ un conjunto de sucesos mutuamente excluyentes y exhaustivos, y tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero (0). Sea B un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B|A_i)$. Entonces, la probabilidad $P(A_i|B)$ viene dada por la expresión:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}$$

donde:

- $P(A_i)$ son las probabilidades a priori.
- $P(B|A_i)$ es la probabilidad de B en la hipótesis A_i.
- $P(A_i|B)$ son las probabilidades a posteriori.

2.8. Distribución Marginal Conjunta

Dentro de la teoría de probabilidades, dadas dos variables aleatorias juntas *X*&*Y*, la **distribución marginal** de *X* es simplemente la ley de probabilidad de *X* haciendo caso omiso de la información referente a *Y*. Este tipo de cálculo se produce cuando se considera el estudio de una tabla de contingencia.[1]

Para las variables aleatorias discretas, la ley de probabilidad marginal Pr(*X*=*x*) se escribe

$$\Pr(X=x) = \sum_y \Pr(X=x, Y=y) = \sum_y \Pr(X=x|Y=y)\Pr(Y=y),$$

Pr(*X*=*x*,*Y*=*y*) es la distribución conjunta de *X*&*Y*, mientras que Pr(*X* =*x*| *Y*=*y*) es la distribución condicional de *X*conociendo *Y*. Ésta es la lección principal del Teorema de la probabilidad total.

Del mismo modo, para variables aleatorias continuas, la densidad de probabilidad marginal 'p$_X$ *(*x*) verifica*

$$p_X(x) = \int_y p_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_y p_{X|Y}(x|y)\,p_Y(y)\,\mathrm{d}y$$

donde $p_{X,Y}$ da la distribución conjunta de X&Y, y $p_{X|Y}|(x|y)$ la distribución condicional de *X* conociendo *Y*.